

文章编号:1005-3085(2011)01-0139-04

支付红利的最优投资消费模型研究*

赵小艳, 段启宏

(西安交通大学理学院统计金融系, 西安 710049)

摘 要: 研究支付红利的期望终端资产效用和消费效用问题. 对一类 CRRA 型效用函数, 运用 Feynman-Kac 公式, 通过有效变换, 给出最优问题的值函数的随机表示解, 并用反馈形式给出了最优投资消费策略.

关键词: 最优投资消费; 红利; 粘性解; CRRA 型效用函数; Feynman-Kac 公式

分类号: AMS(2000) 90A09; 93E20

中图分类号: F224; F830

文献标识码: A

1 引言

多文献都用随机微分方程来描述证券的价格过程. Merton^[1] 最早用随机微分方程研究常系数的连续时间最优投资消费问题, 但没有考虑不完备市场中的随机收入、红利支付及交易费用等情况. Zariphopoulou^[2] 也没有考虑这些情况. 文献 [3] 考虑系数与时间有关的红利支付的最优投资消费问题, 随后文献 [4] 考虑有红利支付和随机收入的常系数情形. 文献 [5] 用 Legendre 变换给出有红利支付和随机收入的常系数情形的解析形式. 本文综合考虑以上情形, 研究有红利支付的非线性股票动态的最优投资消费问题, 求出最优问题的值函数是其对应的 HJB 方程的惟一粘性解, 证明了最优投资消费策略是存在的. 对一类 CRRA 型效用函数, 通过对值函数做有效的变换, 用反馈形式给出了最优投资策略和最优消费策略, 并且用 Feynman-Kac 公式给出值函数的随机形式解.

2 模型的描述

假设金融市场上存在一种无风险资产(如银行存款或债券), 其价格 B_t 满足: $dB_t = rB_t dt$, $B_0 = B$, 常数 $r > 0$ 表示银行利率. 另一种是风险资产(如股票), 其价格 S_t 满足 $dS_t = \mu(S_t)S_t dt + \sigma(S_t)S_t dW_t$, $S_0 = S \geq 0$, W_t 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ 上的标准 Brownian 运动, 系数 $\mu: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 和 $\sigma: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是当前风险资产价格的函数, 满足下面的条件使得上述风险资产的价格方程存在惟一解.

假设 1 对所有的 $S > 0$, $\mu(S) > r$, $\mu(0) = r$ 和 $\frac{(\mu(S)-r)^2}{\sigma^2(S)} \leq M$, 其中 M 是正常数.

假设 2 若 f 表示 $\mu(S)S$ 和 $\sigma(S)S$, 则对所有 $S \geq 0$, 存在正常数 L 使得 $|f(S) - f(\bar{S})| \leq L|S - \bar{S}|$, $f^2(S) \leq L(1 + S^2)$.

假设 3 对任意的 $t \leq s \leq T$, 如果 $S_t > 0$, 则 $S_s > 0$; 如果 $S_t = 0$, 则 $S_s = 0$.

给定到期时间 T , 投资者可以任意选取起始时间 t , $0 \leq t \leq T$, 而在区间 $[t, T]$ 上进行投资. π_s^0 和 π_s 分别表示 s 时刻分别投资在债券和股票上的资产额, c_s 为时刻 s 的消费率, b 为

收稿日期: 2009-04-14. 作者简介: 赵小艳 (1976年8月生), 女, 博士, 讲师. 研究方向: 金融数学.

*基金项目: 国家自然科学基金 (70971109); 西安交通大学交叉学科项目基金 (2009xjtujc33).

投资者在单位时间内每一货币单位股票上所得的红利收入, 则投资者的资产过程满足 $X_s = \pi_s^0 + \pi_s$ 和

$$dX_s = rX_s ds + (\mu(S_s) + b - r)\pi_s ds - c_s ds + \sigma(S_s)\pi_s dW_s, \quad X_t = x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq s \leq T.$$

对 $t \leq s \leq T$, 称投资消费策略 (π_s, c_s) 为容许策略, 如果它是 $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u : t \leq u \leq s)$ 渐进可测的, 且 $X_s \geq 0$, $E \int_t^T c_s ds < +\infty$, $E \int_t^T \sigma(S_s)^2 \pi_s^2 ds < +\infty$. 记容许策略的全体为 \mathcal{A} .

投资者的目标为最大化他的期望消费效用和终端资产效用, 即

$$v(t, x, S) = \sup_{(\pi, c) \in \mathcal{A}} E \left[U_1(X_T) + \int_t^T U_2(c_s) ds \mid X_t = x, S_t = S \right], \quad (1)$$

其中 U_1, U_2 为效用函数, 满足下面的条件:

- 1) $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 是严格增、严格凹的 $C^2(0, +\infty)$ 函数;
- 2) 存在常数 $M > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$, 使得 U 满足增长条件, 对任意的 $c \geq 0$, 有 $U(c) \leq M(1+c)^\gamma$.

3 主要结论

对 (1) 进行随机分析, 应用随机控制理论^[5], 得到值函数 v 满足的 HJB 方程

$$\begin{aligned} v_t + \max_{\pi} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(S) \pi^2 v_{xx} + \sigma^2(S) \pi S v_{xS} + (\mu(S) + b - r) \pi v_x \right] \\ + \frac{1}{2} \sigma^2(S) S^2 v_{SS} + \mu(S) S v_S + r x v_x + \max_{c \geq 0} [-c v_x + U_2(c)] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

引理 1 最优问题 (1) 的值函数 $v(t, x, S)$ 关于变量 x 是凹函数和非降函数.

由效用函数的凹性和容许策略的非降性立即可得该结论.

定理 1 最优问题 (1) 的值函数 v 是 HJB 方程 (2) 的惟一限制粘性解.

证明可参考文献 [2] 中 Theorem 3.1 和 Theorem 3.2.

现在, 考虑相对厌恶风险 (CRRA) 效用函数 $U(c) = \frac{1}{\gamma} c^\gamma$, 其中 $1 - \gamma$ 称做厌恶风险系数, 满足 $0 \leq 1 - \gamma < 1$, $\gamma = 0$ 就是对数效用函数 $U(c) = \log(c)$.

取 $U_1(x) = U_2(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$, (1) 和 (2) 分别变为

$$v(t, x, S) = \sup_{(\pi, c) \in \mathcal{A}} E \left[\frac{1}{\gamma} X_T^\gamma + \int_t^T \frac{1}{\gamma} c_s^\gamma ds \mid X_t = x, S_t = S \right], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_t + \max_{\pi} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(S) \pi^2 v_{xx} + \sigma^2(S) \pi S v_{xS} + (\mu(S) + b - r) \pi v_x \right] \\ + \frac{1}{2} \sigma^2(S) S^2 v_{SS} + \mu(S) S v_S + r x v_x + \max_{c \geq 0} \left[-c v_x + \frac{1}{\gamma} c^\gamma \right] = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

上式中的两个极值分别在下面点处取得

$$\pi^*(t, x, S) = - \left[\frac{S v_{xS}}{v_{xx}} + \frac{(\mu(S) + b - r) v_x}{\sigma^2(S) v_{xx}} \right], \quad c^*(t, x, S) = v_x^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

由引理 1 和 X_s 的线性性质, v 可以写成形式

$$v(t, x, S) = \frac{x^\gamma}{\gamma} w(t, S)^{1-\gamma}, \quad (5)$$

由(4)得 $w(t, S)$ 满足的方程为

$$w_t + \frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2w_{SS} + \left[\mu(S)S + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\mu(S) + b - r)S\right]w_S + \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r + \frac{(\mu(S) + b - r)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2(S)}\right]w + 1 = 0. \quad (6)$$

下面定理是本文的主要结论.

定理 2 1) 最优问题(3)中的值函数 $v(t, x, S)$ 具有(5)的表示形式, 其中 $w: [0, T] \times R^+ \rightarrow R^+$ 是(6)和下面边界条件的惟一粘性解

$$w(T, S) = 1, \quad w(t, 0) = \left(1 + \frac{1-\gamma}{r\gamma}\right)e^{\frac{r-\gamma}{1-\gamma}(T-t)} - \frac{1-\gamma}{r\gamma}. \quad (7)$$

2) 对任意的 $t \leq s \leq T$, 最优投资策略 $\pi_s^* = \pi^*(s, X_s^*, S_s)$ 有下面的反馈形式

$$\pi^*(s, x, S) = \left[\frac{Sw_S(s, S)}{w(s, S)} + \frac{\mu(S) + b - r}{(1-\gamma)\sigma^2(S)}\right]x. \quad (8)$$

3) 最优消费策略 $c_s^* = c^*(s, X_s^*, S_s)$, $t \leq s \leq T$ 具有下面的反馈形式

$$c^*(s, x, S) = \frac{x}{w(s, S)}, \quad (9)$$

其中 X_s^* 是下面随机微分方程的解 $X_s^* = rX_s^*ds + (\mu(S_s) + b - r)\pi_s^*ds - c_s^*ds + \sigma(S_s)\pi_s^*dW_s$.

证明 首先, 由假设(3)立即可得边界条件(7), 再由文献[6-8]可证得方程(6)有满足边界条件(7)的惟一粘性解. 其次, 对 $F(t, x, S) = \frac{x^\gamma}{\gamma}w(t, S)$ 应用粘性解的定义, 证得 F 是方程(6)在 $0 \leq t < T$ 和 $x > 0, S > 0$ 上的粘性解. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} F_x(t, x, S) = +\infty$ 可得 F 在 $0 \leq t < T, S \geq 0$ 上有粘性下解. 因此, F 是方程(4)的限制粘性解, 在(4)的粘性解集中, 又由于定理1已经证得方程(4)粘性解是惟一的, 因此可得 $v(t, x, S) = F(t, x, S) = \frac{x^\gamma}{\gamma}w(t, S)^{1-\gamma}$.

由随机控制理论^[9], 可以将最优投资消费策略写成 $\pi_s^* = \pi^*(s, X_s^*, S_s)$ 和 $c_s^* = c^*(s, X_s^*, S_s)$, 结合(4)中的极值点可得定理中的最优投资消费策略(8)和(9).

下面求解方程(6). 为了简化起见, 不妨设

$$k(S) = \frac{\gamma}{1-\gamma}(\mu(S) + b - r)S, \quad m(S) = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[r + \frac{(\mu(S) + b - r)^2}{2(1-\gamma)\sigma^2(S)}\right],$$

式(6)变成

$$w_t + \frac{1}{2}\sigma^2(S)S^2w_{SS} + [\mu(S)S + k(S)]w_S + m(S)w + 1 = 0, \quad (10)$$

由 Feynman-Kac 公式^[10], 可以表示上面方程的随机解

$$w(t, S) = \tilde{E}\left[e^{\int_t^T m(\tilde{S}_s)ds} + \int_t^T e^{\int_t^s m(\tilde{S}_u)du}d\tilde{S}_s \mid \tilde{S}_t = S\right],$$

其中 \tilde{S}_s , $t \leq s \leq T$ 满足方程 $d\tilde{S}_s = [\mu(\tilde{S}_s)\tilde{S}_s + k(\tilde{S}_s)]ds + \sigma(\tilde{S}_s)\tilde{S}_sd\tilde{W}_s$, \tilde{W}_s 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{Q})$ 上的标准 Brownian 运动, \tilde{E} 是对 \mathbf{Q} 取期望. 比较上面的随机微分方程与股票的价格方程, 它们很相似, 只是有漂移 $k(\tilde{S}_s)$.

因此, 最优问题(3)的随机表示解为

$$v(t, x, S) = \frac{x^\gamma}{\gamma}\left(\tilde{E}\left[e^{\int_t^T m(\tilde{S}_s)ds} + \int_t^T e^{\int_t^s m(\tilde{S}_u)du}d\tilde{S}_s \mid \tilde{S}_t = S\right]\right)^{1-\gamma}. \quad (11)$$

容易看出, 当 $S \rightarrow 0$, 方程(10)“收敛”到 $w_t + \frac{r-\gamma}{1-\gamma}w + 1 = 0$, 该方程的解为 $w(t, 0) = (1 + \frac{1-\gamma}{r\gamma})e^{\frac{r-\gamma}{1-\gamma}(T-t)} - \frac{1-\gamma}{r\gamma}$, 包含边界条件(7).

4 结束语

利用随机微分方程、随机控制理论,对红利支付的非线性股票动态的最优投资消费问题进行研究,对一类CRRA型效用函数,得出反馈形式的最优投资消费策略公式(8)和(9),给出最优值函数的随机表示解(11)。这个模型可以用来描述投资银行、证券公司、政府部门等机构在投资决策过程中的决策问题,有广阔的应用前景。

参考文献:

- [1] Merton R. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time[J]. Journal of Economic Theory, 1971, 3: 373-413
- [2] Zariphopoulou T. Optimal investment and consumption models with non-linear stock dynamics[J]. Mathematical Methods of Operation Research, 1999, 50: 271-296
- [3] 费为银. 考虑红利支付的最优投资消费模型研究[J]. 安徽机电学院学报, 1997, 4: 62-67
Fei W Y. Study on consumption and investment model considering dividend payment[J]. Journal of Anhui Institute of Mechanical and Electrical Engineering, 1997, 4: 62-67
- [4] 丁传明, 邹捷中. 考虑随机收入和红利支付的最优投资消费模型研究[J]. 长沙铁道学院学报, 2003, 3: 93-96
Ding C M, Zou J Z. Study on optimal investment and consumption model considering dividend payment and stochastic income in incomplete markets[J]. Journal of Changsha Railway University, 2003, 3: 93-96
- [5] 肖建武. 考虑红利支付和随机收入的最优投资消费的解析决策[J]. 统计与决策, 2006, 9: 10-11
Xiao J W. Decision on optimal investment and consumption considering dividend payment and stochastic income[J]. Statistics and Decision, 2006, 9: 10-11
- [6] Ishii H, Lions P L. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations[J]. Journal of Differential Equations, 1990, 83: 26-78
- [7] Lions P L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations 1: the dynamic programming principle and applications[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1983, 8: 1101-1174
- [8] Lions P L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations 2: viscosity solutions and uniqueness[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1983, 8: 1229-1276
- [9] Bernt Ø. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1998
- [10] Karatzas I, Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus[M]. New York: Springer-Verlag, 1991

Optimal Investment and Consumption Models with Dividend Payment

ZHAO Xiao-yan, DUAN Qi-hong

(Department of Statistics and Finance, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: This paper discusses the problem of the expected utility from terminal wealth and consumption with dividend payment. Through employing a transformation on the CRRA utility function, we are able to derive the stochastic representation of the value function by Feynman-Kac formula and get the optimal investment-consumption policies in the form of feedback function.

Keywords: optimal investment consumption; dividend; viscosity solution; CRRA utility function; Feynman-Kac formula

Received: 14 Apr 2009. Accepted: 24 Feb 2010.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (70971109); the Interdiscipline Funds of Xi'an Jiaotong University (2009xjtujc33).